15/05/17

→ $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$
$\Downarrow$
x_0.

$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$.

- Πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο σημείο x_0.

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad (*)$$

- Υπόλοιπο Taylor τάξης n της f στο x_0

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x).$$

Στην ειδική περίπτωση που $x_0=0$ το πολυώνυμο έχει την μορφή

$$T_{n,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

καλείται πολυώνυμο Maclaurin της f.
(και αντ. το υπόλοιπο Maclaurin)

$$(*) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Παρατήρηση:
Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, n φορές παραγ. στο $[\alpha,\beta]$, $x_0\in[\alpha,\beta]$

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Τότε $T'_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1} =$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)}(x-x_0)^{k-1}$

NO DATE

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $k-1=s$

$$T'_{n,f,x_0}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(f')^{(s)}(x_0)}{s!}(x-x_0)^s$$

$$= T_{n-1,f',x_0}(x)$$

Έτσι $T'_{n,f,x_0} = T_{n-1,f',x_0}$ και επίσης

$$R'_{n,f,x_0} = f' - T'_{n,f,x_0}$$
$$= f' - T_{n-1,f',x_0}$$
$$= R_{n-1,f',x_0}$$

<u>Θεώρημα</u> (**): Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, f: $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0 είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$, που έχει την ιδιότητα:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n}=0} \quad (1)$$

Για να αποδείξω το παραπάνω θεώρημα, θα χρειαστούμε τα εξής λήμματα:

Λήμμα 1: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Απόδ.

Με επαγωγή στο n.

1ο Επαγωγικό βήμα για $n=1$:

$$R_{1,f,x_0}(x) = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\right)$$

$$\frac{R_{1,f,x_0}(x)}{(x-x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \xrightarrow{x\to x_0} 0.$$

(από τον ορισμό της παραγώγου.)

Γενικό επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για $n=m$ για κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ m φορές παραγωγ. στο $[\alpha,\beta]$, και m+1 φορές παραγωγ. στο x_0.

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} R_{m+1,f,x_0}(x) =$

$$= 0 = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{m+1}$$

και $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R'_{m+1,f,x_0}(x)}{\left[(x-x_0)^{m+1}\right]'} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_{m,f',x_0}(x)}{(m+1)(x-x_0)^m} \to 0$

(λόγω της προηγ. υπόθεσης για την f')

Από τον κανόνα DLH συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{m+1,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^m} = 0$$

NO DATE

Άσκηση 9: Έστω $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ ώστε να ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$, Τότε $P=0$ (το μηδ. πολυώνυμο)

Απόδ.

Με επαγωγή

Για $n=0$:

Άμεσο (σταθερό).

Έστω $n \geq 1$

$$P(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{(x-x_0)^n} \cdot (x-x_0)^n = 0.$$

Άρα το x_0 είναι ρίζα του $P(x)$

Άρα $P(x) = (x-x_0)\pi(x)$, όπου $\pi(x)$ πολ/μο βαθμού $\leq n-1$.

Τότε $$\lim_{x \to x_0} \frac{\pi(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Άρα από επαγωγ. υπόθεση ότι $\pi(x)=0$

άρα $P(x)=0$.

Απόδειξη θεωρήματος **

Από το λήμμα 1 το $T_{n,f,x_0}(x)$ ικανοποιεί την σχέση (1)

Αν $T_1(x), T_2(x)$ δύο πολυώνυμα βαθμού $\leq n$ που ικανοποιούν την (1)

Τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{T_1(x)-T(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ και από το

Λήμμα 2: $T_1(x) = T_2(x)$.

Το θεώρημα μας βοηθά να βρούμε έμμεσα το πολ. Taylor τάξης n της f στο x_0. Αρκεί να βρούμε ένα πολ $T(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Τότε $T_{n,f,x_0}(x) = T(x)$

Υπολογισμός πολυωνύμων Taylor γνωστών συναρτήσεων.

a) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$

Άρα $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \dots, n$

$$T_{n,f,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

NO DATE

β) $f(x)=\sin x$

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f'''(x)=-\cos x$

$f^{(4)}(x)=\sin x$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{aligned} f^{(4n)}(x)&=\sin x\\ f^{(4n+1)}(x)&=\cos x\\ f^{(4n+2)}(x)&=-\sin x\\ f^{(4n+3)}(x)&=-\cos x \end{aligned}\right\} \text{Άρα: } \begin{aligned} f^{(4n)}(0)&=0\\ f^{(4n+1)}(0)&=1\\ f^{(4n+2)}(0)&=0\\ f^{(4n+3)}(0)&=-1 \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο Taylor:

$$T_{2n+1,f,0}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{5!}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$\parallel$$

$$T_{2n+2,f,0}(x)$$

γ) $f(x)=\cos x$

$f'(x)=-\sin x$

$f''(x)=-\cos x$

$f'''(x)=\sin x$

$f^{(4)}(x)=\cos x$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{aligned} f^{(4n)}(x)&=\cos x\\ f^{(4n+1)}(x)&=-\sin x\\ f^{(4n+2)}(x)&=-\cos x\\ f^{(4n+3)}(x)&=\sin x \end{aligned}\right\} \text{Άρα: } \begin{aligned} f^{(4n)}(0)&=1\\ f^{(4n+1)}(0)&=0\\ f^{(4n+2)}(0)&=-1\\ f^{(4n+3)}(0)&=0 \end{aligned}$$

NO DATE

Το πολυώνυμο Taylor:

$$T_{2n,f,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

δ) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$

Γνωρίζουμε: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad |x|<1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Θα δ.ο: $T_{n,f,0}(x) = 1 + x + \dots + x^n$

Θέτουμε $T_n(x) = 1 + x + \dots + x^n$.

Έχουμε:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{x^{k+1}}{1-x}.$$

Άρα $\frac{f(x) - T_n(x)}{x^n} = \frac{x}{1-x}.$

Άρα $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - T_n(x)}{x^n} = 0$, άρα από το

θεώρημα $T_{n,f,0}(x) = 1 + x + \dots + x^n$

NO DATE

ε) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\dots+ (-1)x^{2n}+\dots$, για $|x|<1$.

Θα δ.ο: $T_{2n,f,0}(x)=T_{2n+1,f,0}(x)=$
$=1-x^2+x^4-\dots+(-1)^n\cdot x^{2\cdot n}$

Θέτουμε: $T_{2n}(x)=1-x^2+x^4-\dots+(-1)^n\cdot x^{2n}$

$$\frac{f(x)-T_{2n}(x)}{x^{2n}}\leq\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}}{x^{2n}}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{(1+x^2)\cdot x^{2n}}=\frac{(-1)^{n+1}x^2}{1+x^2}\xrightarrow{x\to 0}0$$

$$\frac{f(x)-T_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}}=\frac{(-1)^{n+1}x}{1+x^2}\xrightarrow{x\to 0}0$$

Συνεπώς από το θεώρημα έπεται το ζητούμενο.

Θεώρημα (Taylor):

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $n+1$ φορές παραγ. στο $[\alpha,\beta]$, $x_0\in[\alpha,\beta]$.

Τότε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ το υπόλοιπο Taylor
$R_{n,f,x_0}(x)=f(x)-T_{n,f,x_0}(x)$
Παίρνει κάθε μία από τις 3 μορφές:

(α) (Μορφή Cauchy του υπολοίπου Taylor):
Υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα x_0, x ώστε: $R_{n,f,x_0}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$

(β) (Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor)
Υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα x_0, x ώστε:

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(γ) (Ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor)
Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη
τότε:

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Απόδ

$\Rightarrow$

NO DATE

Σταθεροποιούμε $x \in [\alpha, \beta]$ και ορίζουμε

$\phi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$:

$$\phi(t) = R_{n,f,t}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k =$$

$$= f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

Παραγωγίζοντας την ϕ : $\phi'(t) = 0$

$$\phi'(t) = 0 - f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{-f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$\phi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x)$

$\phi(x) = R_{n,f,x}(x) = 0$

Απόδειξη

(α) Μορφής (Μορφή Cauchy)

Από ΘΜΤ του διαφορ. λογισμού στο διάστημα με άκρα τα x_0, x $\exists\ \xi$ στο διάστημα αυτό ώστε:

$$\phi(x_0) - \phi(x) = \phi'(\xi)(x_0 - x)$$

$$\Rightarrow R_{n,f,x_0}(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x_0-x)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

(β) Μορφή Lagrange.

Από το γεν. θεωρ. Μ.Τ. του Cauchy για τις Φ και g με $g(x)=(x-1)^{n+1}$ $\exists\, \xi$ στο διάστημα με άκρα τα x_0, x

$$\frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\Phi(x_0)-\Phi(x)}{g(x_0)-g(x)} = \frac{\Phi'(\xi)}{g'(\xi)} =$$

$$= \text{με πράξεις} \ldots = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Άρα $R_{n,f,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

→ ΟΧΙ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

(γ) Ολοκληρωτική μορφή η Φ' είναι ολοκληρώσιμη άρα:

$$R_{n,f,x_0}(x) = \Phi(x_0)-\Phi(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \Phi'(t)\,dt = \int_{x}^{x_0} -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

NO DATE

Ανάπτυξη γνωστών συναρτήσεων σε δυναμοσειρές. Σειρές Taylor.

α) $f(x) = e^x$

Είδαμε νωρίτερα ότι:

$$T_{n,f,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Θέλουμε να δ.ο:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Δηλαδή ότι $e^x = \lim_{n \to +\infty} T_{n,f,0}(x)$

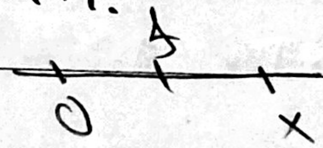
→ Για $x=0$ προφανές $(1=1)$

→ Για $x \neq 0$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου $\exists\, \xi$ στο διάστημα με άκρα τα $0, x$

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Αν $x>0$: $|R_{n,f,0}(x)| = \dfrac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \dfrac{e^{x} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$



Αν $x<0$: $0<x<\xi<0$, άρα $e^{\xi} < e^0 = 1$

$$|R_{n,f,0}(x)| = \frac{e^{\xi} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου για την ακολουθία $a_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+2} \to 0 < 1$ άρα $a_n \to 0$.

Συνεπώς $R_{n,f,0}(x) \to 0$

Επομένως:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$